Macierze przykłady z rozwiązaniami

Macierze:

Dodawanie macierzy

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & 8 & 7\\6 & 5 & 4\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 10 & 10\\10 & 10 & 10\\10 & 10 & 10\end{bmatrix}$$

Odejmowanie

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 8 & 7\\6 & 5 & 4\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -6 & -4\\-2 & 0 & 2\\4 & 6 & 8\end{bmatrix}$$

Mnożenie przez skalar

$$4\cdot\begin{bmatrix}8 & -4 & -1\\-5 & 3 & 0\\1 & -5 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & -16 & -4\\-20 & 12 & 0\\4 & -20 & 2\end{bmatrix}$$

Transponowanie macierzy

A

2	1
4	3
5	7
6	8

Po transpozycji ->

AT

2	4	5	6
1	3	7	9

Mnożenie macierzy

Macierz A

1	2	3
4	5	6

Macierz B

9	8
7	6
5	4

AxB

			9	8
			7	6
			5	4
1	2	3	1*9+2*7+3*5=**38**	1*8+2*6+3*4=**32**
4	5	6	4*9+5*7+6*5=**101**	4*8+5*6+6*4=**86**

Wyznacznik Macierzy – sposob1
Wyznacznik Macierzy - sposob2

Wyznacznik Macierzy – sposob1

A=

2	2	1
3	9	4
1	5	3

Rozwiązanie
Mnożymy po przekątnych
detA=2*9*3+3*5*1+1*2*4-1*9*1-4*5*2-3*2*3=54+15+8-9-40-18=10
detA=10

Wyznacznik Macierzy – sposob2

A=

2	2	1
3	9	4
1	5	3

Rozwiązanie
Tworzymy macierz dopełnień
Macierze dopełnień

$$D_{11}=\begin{vmatrix}9&4\\5&3\end{vmatrix}=9*3-5*4=7 \qquad D_{12}=-\begin{vmatrix}3&4\\1&3\end{vmatrix}=-(3*3-1*4)=-5 \qquad D_{13}=\begin{vmatrix}3&9\\1&5\end{vmatrix}=6$$

$$D_{11}=\begin{vmatrix}9&4\\5&3\end{vmatrix}=7 \qquad D_{12}=-\begin{vmatrix}3&4\\1&3\end{vmatrix}=-5 \qquad D_{13}=\begin{vmatrix}3&9\\1&5\end{vmatrix}=6$$

Mnożymy macierz elementy macierzy dopełnień przez odpowiednie elementy macierzy A

detA=2*D_{11}+2*D_{12}+1*D_{13}=2*7+2*(-5)+1*6=14-10+6=10

Wyznacznik macierzy A wynosi 10 (detA=10)

Macierz odwrotna - Znalezienie macierzy odwrotnej

A=

2	2	1
3	9	4
1	5	3

Krok1
detA=2*9*3+3*5*1+1*2*4-1*9*1-4*5*2-3*2*3=54+15+8-9-40-18=10
detA=10
Ponieważ wyznacznik detA<>0 to istnieje macierz odwrotna

Krok2

Wyznaczamy macierz dopelnień

$D_{11}=\begin{vmatrix}9&4\\5&3\end{vmatrix}$ =9*3-5*4 =7

$D_{12}=-\begin{vmatrix}3&4\\1&3\end{vmatrix}$ =-(3*3-1*4) =-5

$D_{13}=\begin{vmatrix}3&9\\1&5\end{vmatrix}$ =6

$D_{21}=-\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}$ =-1*(2*3-5*1) =-1

$D_{22}=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}$ =2*3-1=5

$D_{23}=-\begin{vmatrix}2&2\\1&5\end{vmatrix}$ =-8

$D_{31}=\begin{vmatrix}2&1\\9&4\end{vmatrix}$ 2*4-9*1=-1

$D_{32}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}$ =-(2*4-3*1) =-5

$D_{33}=\begin{vmatrix}2&2\\3&9\end{vmatrix}$ =12

Otrzymujemy:

$A^D=$

7	-5	6
-1	5	-8
-1	-5	12

Krok3 – transpozycja macierzy dopelnień (AD)

$A^{DT}=$

7	-1	-1
-5	5	-5
6	-8	12

Krok4

Tworzymy macierz odwrotną

$A^{DT}=1/10*$

0,7	-0,1	0,1
-0,5	0,5	-0,5
0,6	-0,8	1,2

Zadanie 2

Tresc:Obliczyc macierz odwrotna macierzy

$$A=\begin{bmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{bmatrix}$$

<u>Rozwiazanie:</u>

Opis rozwiazania:

Krok 1

Wyznaczamy wyznacznik macierzy A

$$\det(A)=54+45+28-27-40-63=-3$$

Wyznacznik jest rozny od 0 więc istnieje macierz odwrotna.

Krok 2

Wyznaczamy macierz dopelnien.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 20 = 7 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(9-4) = -5 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 9 = 6$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(21-15) = -6 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(10-7) = -3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 27 = 1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-9) = 1 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 21 = -3$$

Otrzymujemy nastepujaca macierz:

$$A^D = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Krok 3
Transponujemy macierze:

$$A^{DT} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Transponowanie macierzy polega na zamianie indeksu wiersza na indeks kolumny i odwrotnie tzn a23 -> a32

Krok 4
Tworzymy macierz odwrotna:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dzialania na macierzy

Tresc:Dana jes macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Oblicz $A^2 - 7A + 9I$

__**Rozwiazanie:**__

Opis rozwiazania: Wykonumejemy dzialania po kolei

$$7A = 7 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 35 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 2+5 \\ 2+5 & 1+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 26 \end{bmatrix}$$

$$9I = 9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 7A + 9I = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy

Oblicz rzad macierzy A

A=

1	2	3	4
0	1	5	0
0	6	7	4
1	7	5	8
-1	3	-1	0

Rozwiązanie:

Sprowadzamy macierz A do postaci schodkowej stosując przekształcenia elementarne macierzy*(mnożać odpowiedni wiesz bądz kolumne dodajemy lub odejmujemy tak by uprościć macierz i doprowadzic do postaci schodkowej).*

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -23 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -23 & 4 \\ 0 & 0 & -23 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -23 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

Rzad macierzy A wynosi 3 (rząd=3)

Układy równań

Korzystając ze wzorów Cramera wyznacz x,y,z z następującego układu równań:
-x+y=2
x+y=1
y+2z=5
Rozwiązanie:
Dane rownania możemy zapisac:
-1*x+1*y+0*z=2
1*x+0*y+1*z=1
0*x+1*y+2*z=5

A=

-1	1	0
1	0	1
0	1	2

detA=0+0+0-0+1-2=-1

detA=

-1	1	0	**x**
1	0	1	**y**
0	1	2	**z**

detA=

-1	1	0	**2**
1	0	1	**1**
0	1	2	**5**

detA1=

2	1	0
1	0	1
5	1	2

=1

detA2=

-1	2	0
1	1	1
0	5	2

=-1

detA3=

-1	1	2
1	1	1
0	1	5

=-2

x=detA1/detA=1/-1=-1
y=detA2/detA=-1/-1=1
z=detA3/detA=-2/-1=2

A więc
x=-1, y=1, z=2